Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (6 баллов) Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $1 + 2^{2025} + 2^n$ является точным квадратом.

Ответ: 4048.

Решение. Так как нечётные степени двойки дают остаток 2 при делении на 3, а точные квадраты дают только остатки 0 и 1, то n чётно (иначе сумма была бы сравнима с 1 + 2 + 2 по модулю 3, то есть давала бы остаток 2). Если $n = 2m$, то сумма является квадратом числа, большего 2^m, поэтому она не меньше чем $(1 + 2^m)^2 = 1 + 2^{m+1} + 2^n$, откуда $m + 1 \le 2025$. При $m = 2024$ сумма является квадратом числа $1 + 2^{2024}$.

Задача 2. (6 баллов) Найдите такое натуральное n, что $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{n}] = 100$. Через $[x]$ обозначается целая часть x, то есть ближайшее целое число, не превосходящее x.

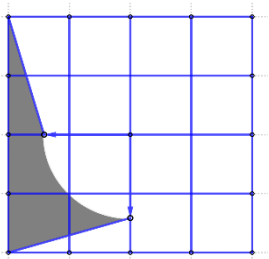
Ответ: 30.

Решение. Разности между соседними точными квадратами образуют последовательность нечётных чисел. Значит, в сумме из условия первые три слагаемых равны 1, следующие пять – 2, следующие семь – 3, следующие девять – 4. Сумма первых 24 слагаемых равна $1\cdot3 + 2\cdot5 + 3\cdot7 + 4\cdot9 = 70$. Далее идут слагаемые, равные 5, которых требуется шесть штук, чтобы получить 100. Поэтому $n = 24 + 6 = 30$.

Задача 3. (8 баллов) В десятичной записи числа $\frac{1}{2025}$ зачеркнули первую ненулевую цифру. Во сколько раз увеличилось число?

Ответ: в 1,9.

Решение. Заметим, что $0{,}0004 = \frac{1}{2500} < \frac{1}{2025} < \frac{1}{2000} = 0{,}0005$, поэтому зачёркивание в числе $\frac{1}{2025}$ первой ненулевой цифры равносильно вычитанию из него 0,0004 с последующим умножением на 10. Таким образом, новое число равно $\left(\frac{1}{2025} - 0{,}0004\right)\cdot 10 = \frac{10}{2025} - \frac{1}{250} = \frac{100-81}{2025\cdot10} = \frac{19}{10}\cdot\frac{1}{2025}$.



Задача 4. (9 баллов) Границы закрашенной области – отрезки и дуга окружности с центром (2, 2), проходящей через точку (1, 1). Найдите площадь этой области с точностью до 0,1 (округлите её до ближайшего числа, кратного 0,1).

Ответ: 2,4.

Решение. Рассмотрим левый нижний квадрат 2×2. От него отрезана четверть круга радиусом $\sqrt{2}$ и прямоугольный треугольник, но ровно такой же треугольник добавлен сверху. Значит, площадь закрашенной области равна $2\cdot2 - \frac{2\pi}{4} = 4 - \frac{\pi}{2} \approx 2{,}4$.

Задача 5. (9 баллов) На шахматной доске нарисован пятиугольник (не обязательно выпуклый), ни одна из вершин которого не попадает на границы клеток. В каком наибольшем количестве точек он может пересекать границы клеток доски?

Ответ: 56.

Решение. *Оценка*. Прямая, не проходящая через вершины пятиугольника, пересекает не более четырёх его сторон (количество пересечений чётно, так как прямая заходит внутрь пятиугольника столько же раз, сколько и выходит). Все границы клеток внутри доски лежат на семи горизонтальных и семи вертикальных прямых, поэтому точек пересечения не больше $4\cdot14 = 56$.

Пример. Поместим вершины A, B, C, D и E пятиугольника $ABCDE$ в клетки a1, a8, h1, a8 и h1 соответственно так, чтобы отрезки BC, CD и DE не пересекали границы клеток в их вершинах.

Задача 6. (10 баллов) Даны две арифметические прогрессии: 1, 6, 11, 16, … и 1, 5, 9, 13, … Из них составили третью последовательность, куда включили те и только те числа, которые встречаются ровно в одной из исходных прогрессий. Найдите 100-е по величине число в этой последовательности.

Ответ: 286.

Решение. Каждое четвёртое число первой прогрессии (начиная с первого) встречается и во второй. Иначе говоря, пересечением прогрессий является прогрессия с разностью 20. Следовательно, в третьей последовательности будут числа вида $20k + 6$, $20k + 11$, $20k + 16$ из первой прогрессии и $20k + 5$, $20k + 9$, $20k + 13$, $20k + 17$ из второй – всего семь чисел в каждой последовательной двадцатке. Чтобы найти 100-е

число, отсчитаем 14 полных двадцаток (со значениями k от 0 до 13, в них будет 7•14 = 98 чисел) и возьмём второе число из следующей двадцатки, то есть $20k + 6$ при $k = 14$.

Задача 7. (12 баллов) Десяти мудрецам надели колпаки синего, красного, жёлтого и зелёного цветов и сообщили, что колпаки всех цветов присутствуют. Каждый мудрец видит колпаки всех остальных, но не знает цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: «Ваш колпак зелёный?» Никто не ответил ни «Да», ни «Нет». Через минуту этот вопрос повторили. В этот раз никто не ответил «Да». А сколько ответов «Нет» могло прозвучать?

Ответ: 4 или 6.

Решение. Чтобы ответить «Да» на первый вопрос, мудрец не должен видеть на остальных ни одного зелёного колпака. А чтобы ответить «Нет», мудрец не должен видеть на остальных ни одного колпака какого-то другого цвета – в таком случае он поймёт, что на нём колпак именно этого цвета. Поскольку в первый раз нет ни тех, ни других ответов, то все мудрецы понимают, что колпаков каждого цвета не меньше двух. Значит, четыре цвета могли быть распределены как 2 + 2 + 3 + 3 или 2 + 2 + 2 + 4. Аналогично на второй вопрос «Да» могли ответить только те, кто видит один зелёный колпак, а «Нет» – те, кто видит один колпак какого-то другого цвета, то есть всего колпаков этого цвета должно быть два. Так как никто не ответил «Да», то мудрецов в зелёных колпаках не меньше трёх. Поэтому в первом распределении четверо ответили «Нет», а во втором – шестеро.

Задача 8. (13 баллов) Четырёхзначное число является точным квадратом. Если его цифры записать в обратном порядке, то снова получится точный квадрат. Найдите все такие числа.

Ответ: 1089 и 9801.

Решение. Сумма двух чисел вида $\underline{abcd}$ и $\underline{dcba}$ равна $1001(a + d) + 110(b + c)$, поэтому она кратна 11. Так как точные квадраты при делении на 11 дают остатки 0, 1, 3, 4, 5, 9, то сумма двух квадратов делится на 11, только если каждый из них делится на 11. Осталось проверить квадраты чисел от 33 до 99, кратных 11.

Задача 9. (13 баллов) Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Две окружности равного радиуса касаются друг друга и гипотенузы треугольника, а также каждая из них касается одного из катетов. Чему равны радиусы этих окружностей?

Ответ: $\frac{26}{17}$.

Решение. По теореме Пифагора гипотенуза треугольника равна 13. Обозначим радиус окружностей через r, а острые углы треугольника – через 2α и 2β и воспользуемся формулой тангенса половинного угла: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{12/13}{1+5/13} = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta} = \frac{5/13}{1+12/13} = \frac{1}{5}$. Так как центры окружностей лежат на биссектрисах углов треугольника, то можно вычислить длины отрезков касательных от вершин до точек касания: они равны $\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}5r$ и $\frac{r}{\operatorname{tg}\beta} = 5r$. Сумма этих отрезков и удвоенного радиуса окружностей даёт длину гипотенузы, поэтому $1{,}5r + 5r + 2r = 13$, откуда $r = \frac{26}{17}$.

Задача 10. (14 баллов) Чему равно $\log_2((1 + \operatorname{tg} 1°)(1 + \operatorname{tg} 2°)\ldots(1 + \operatorname{tg} 45°))$?

Ответ: 23.

Решение. Заметим, что $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}(45° - x)) = (1 + \operatorname{tg} x)(1 + (1 - \operatorname{tg} x)/(1 + \operatorname{tg} x)) = 2$. Перемножив 22 двойки и $1 + \operatorname{tg} 45° = 2$, получим 23-ю степень двойки, которая и даёт ответ.