Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) В турнире по крестикам-ноликам участвовали три четвероклассника и два пятиклассника. В каждом раунде встречались четвероклассник и пятиклассник. Сначала Саша выиграл у Паши, затем Вася выиграл у Жени, а Саша – у Олега, и, наконец, Олег выиграл у Жени. Как звали пятиклассников?

Ответ: Саша и Женя.

Решение. Указанные в условии раунды позволяют единственным образом разбить детей на две группы так, чтобы каждый встречался только со школьниками из другой группы. В одну такую группу входят Саша с Женей, а в другую – Паша, Вася и Олег. Та группа, в которой всего двое школьников, – пятиклассники.

Задача 2. (6 баллов) Палиндромом называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково, например 12521. Найдите наибольший семизначный палиндром, сумма цифр которого равна 29 и среди цифр которого есть 4 и 5.

Ответ: 8405048.

Решение. Каждая цифра, кроме, возможно, средней, встречается в палиндроме минимум дважды. В искомом числе не может быть двух девяток, поскольку даже 9 + 9 + 4 + 4 + 5 больше 29. Следовательно, первая цифра не больше 8. Если она равна 8, то вторая цифра не может быть больше или равна 5, так как 8 + 8 + 5 + 5 + 4 тоже больше 29. Число, в котором вторая цифра равна 4, существует и оно единственное.

Задача 3. (8 баллов) Менеджер магазина должен определить цену свитера. Исследование рынка дало ему следующие данные: при цене 150 долларов свитер купят 100 покупателей, а каждый раз, когда цена повышается на 10 долларов, свитер купят на 20 человек меньше. Однако каждый раз, когда цена снижается на 10 долларов, можно продать на 20 свитеров больше. Свитера обходятся магазину в 60 долларов за штуку. Какая цена продажи максимизирует прибыль магазина?

Ответ: 130 долларов.

Решение. Пусть магазин выставил цену на свитер $150 + x$ долларов. Тогда будет продано $100 - 2x$ свитеров, а прибыль с каждого из них составит $150 + x - 60 = 90 + x$ долларов. Итого магазин получит прибыль $(90 + x)(100 - 2x) = -2x^2 - 80x + 9000$ долларов. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, а абсцисса вершины равна $\frac{80}{2\cdot(-2)} = -20$. Таким образом, магазин получит максимальную прибыль, если цена одного свитера будет равна $150 - 20 = 130$ долларов.

Задача 4. (8 баллов) На шахматной доске нарисован треугольник, ни одна из вершин которого не попадает на границы клеток. В каком наибольшем количестве точек он может пересекать границы клеток доски?

Ответ: 28.

Решение. *Оценка*. Прямая, не проходящая через вершины треугольника, пересекает не более двух его сторон. Все границы клеток внутри доски лежат на семи горизонтальных и семи вертикальных прямых, поэтому всего точек пересечения не больше $2\cdot 14 = 28$.

Пример. Поместим вершины A, B и C треугольника в клетки a1, a8 и h1 соответственно так, чтобы отрезок BC не пересекал границы клеток в их вершинах.

Задача 5. (8 баллов) В кучке лежит 21 палочка. Два игрока по очереди берут палочки из кучки. За один ход разрешается взять одну, две или три палочки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какое минимальное количество палочек может быть у победителя по окончании игры?

Ответ: 6.

Решение. *Оценка*. Игра заканчивается, когда в кучке не останется палочек. Пусть проигравший сделал n ходов. Тогда он взял не более $3n$ палочек, а победителю досталось не менее $21 - 3n$. С другой стороны, победитель сделал хотя бы n ходов, поэтому взял не менее n палочек. Значит, у него не менее $\max\{n, 21 - 3n\}$ палочек. Этот максимум не меньше 6 (при $n \geq 6$ это очевидно, а если $n \leq 5$, то $21 - 3n \geq 6$).

Пример. Пусть первый игрок всегда берёт по одной палочке, а второй – по три. Тогда после шестого хода первого игра закончится.

Задача 6. (10 баллов) По двум прямым пересекающимся дорогам с одинаковыми постоянными скоростями ехали велосипедисты Петя и Коля. Оказалось, что как в 13:00, так и в 14:00 Петя находился вдвое дальше от перекрёстка, чем Коля. В какой момент времени Коля мог проехать перекрёсток?

Ответ: в 13:15 или 13:45.

Решение. Пусть в 13:00 Коля и Петя находились на расстояниях x и $2x$ от перекрёстка, а в 14:00 – на расстояниях y и $2y$ соответственно. Тогда Коля за этот час проехал либо $|x - y|$, либо $x + y$, а Петя – либо $2|x - y|$, либо $2(x + y)$. Так как их скорости равны, то и проехали они одинаковые расстояния, что возможно, только если Коля проехал $x + y$, а Петя – $2|x - y|$. Уравнение $x + y = 2|x - y|$ приводит к соотношению $y = 3x$ или $x = 3y$. Это означает, что промежуток времени между 13:00 и проездом перекрёстка Колей был втрое меньше или втрое больше, чем промежуток времени между проездом перекрёстка и 14:00. Отсюда получаем два момента времени, указанные в ответе.

Задача 7. (12 баллов) Сумма цифр натурального числа N равна 500, а сумма цифр числа $5N$ равна 349. Сколько нечётных цифр может быть в десятичной записи N?

Ответ: 22.

Решение. Если складывать числа $5N$ и $5N$ столбиком, то сумма цифр результата будет равна $349 \cdot 2 - 9k$, где k – количество переходов через десяток (каждый переход уменьшает сумму цифр в текущем разряде на 10, но увеличивает в следующем на 1). Так как число $10N$ получается из N приписыванием нуля в конце, то сумма его цифр тоже равна 500, поэтому $349 \cdot 2 - 9k = 500$, откуда $k = 22$. Заметим, что в числе $10N$ нечётные цифры будут ровно в тех разрядах, в которые при суммировании переносится единица, поэтому таких цифр 22. Столько же их и в числе N.

Задача 8. (12 баллов) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в середине M стороны CD, а $\angle C = 80°$. Чему может быть равен угол AMB?

Ответ: 80° или 90°.

Решение. Опустим из точки M перпендикуляры MP, MQ и MR на прямые AB, BC и DA соответственно. Так как точка M лежит на биссектрисах углов A и B, то все эти перпендикуляры равны.

Прямоугольные треугольники MDR и MCQ равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle RMD = \angle QMC = 90° - \angle C = 10°$. В зависимости от того, острый или тупой угол D в четырёхугольнике, угол RMQ равен либо $180° - 2 \cdot 10° = 160°$, либо 180°. Углы PMA и RMA дополняют до 90° равные углы PAM и RAM, поэтому они тоже равны. Аналогично $\angle PMB = \angle QMB$, значит, угол AMB равен половине угла RMQ, то есть может быть равен 80° или 90°.

Задача 9. (15 баллов) Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 записаны в строку в некотором порядке. Назовём пару чисел хорошей, если их разность является делителем суммы чисел, записанных между ними (пара соседних чисел всегда хорошая). Каково наибольшее возможное количество хороших пар?

Ответ: 14.

Решение. *Оценка*. В строке записано три нечётных числа. Сумма чисел между двумя крайними из них нечётна, поскольку включает ровно одно нечётное число. При этом разность крайних нечётных чисел чётна. Следовательно, эта пара чисел не может быть хорошей. Так как общее количество пар чисел равно $6 \cdot 5 : 2 = 15$, то хороших пар не больше 14.

Пример. Если числа записаны в порядке 1, 6, 4, 2, 3, 5, то хорошими являются все пары, кроме (1, 5).

Задача 10. (16 баллов) Есть краски трёх цветов: синяя, красная и зелёная. Используя их, требуется раскрасить клетки квадрата 3×3 так, чтобы каждые две соседние по стороне клетки были различных цветов (не обязательно использовать все три цвета). Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 246.

1	2	3

Решение. Есть два принципиально различных способа раскрасить центральную строку (см. рисунок). Понятно, что в каждом из них число способов раскрасить верхнюю строку равно числу способов раскрасить нижнюю.

1	2	1

В первом случае средняя клетка верхней строки может быть раскрашена в цвет 1 или 3. В каждом из этих вариантов для одной угловой клетки остаётся два способа раскраски, а для другой – один. Значит, верхняя строка может быть раскрашена $2 \cdot 2 = 4$ способами.

Во втором случае средняя клетка верхней строки также может быть раскрашена в цвет 1 или 3. Для цвета 1 каждая угловая клетка может быть раскрашена двумя способами, а для цвета 3 – одним. Поэтому всего есть $2 \cdot 2 + 1 = 5$ способов раскрасить верхнюю строку.

С учётом того, что в обоих случаях числа 1, 2, 3 могут означать любую из шести перестановок цветов, получаем $6 \cdot (4^2 + 5^2) = 246$ способов.