Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Отец дал сыну 300 рублей, а другой отец дал своему сыну 700 рублей. На сколько мог увеличиться суммарный капитал сыновей?
Ответ: на 300, 700 или 1000 рублей.
Решение. Если две пары «отец и сын» не пересекаются, то сыновья получили в сумме 1000 рублей. Если же эти две пары образованы из тройки «дед, отец и сын», то капитал сыновей увеличился на столько, сколько отдал дед, то есть на 300 или 700 рублей.

Задача 2. (6 баллов) Найдите двузначное число, у которого при умножении на 2 сумма цифр не меняется, а при умножении на 3 – меняется.
Ответ: 63.
Решение. Обозначим искомое число через N. Поскольку число даёт при делении на 9 такой же остаток, как и сумма его цифр, то из условия следует, что N и $2N$ дают при делении на 9 одинаковые остатки. Это возможно, только если N делится на 9. Перебрав все двузначные числа, кратные 9, убеждаемся, что условие выполняется только для $N = 63$.

Задача 3. (7 баллов) Сколько существует таких квадратов, одна из вершин которого находится в точке (1, 1), а одна из осей симметрии совпадает с одной из осей координат?
Ответ: 5.
Решение. У квадрата есть четыре оси симметрии: горизонтальная и вертикальная средние линии, а также диагонали. Если у искомого квадрата ось Ox содержит горизонтальную среднюю линию, то остальные три вершины имеют координаты либо (1, −1), (−1, −1), (−1, 1), либо (1, −1), (3, −1), (3, 1). Заметим, что у первого квадрата ось Oy также является осью симметрии, поэтому если ось Oy содержит вертикальную среднюю линию квадрата, то добавляется только один вариант: (−1, 1), (−1, 3), (1, 3). Если ось Ox содержит диагональ квадрата, то координаты трёх остальных вершин равны (0, 0), (1, −1), (2, 0), а если ось Oy содержит диагональ квадрата, то (0, 0), (−1, 1), (0, 2). Итого получаем пять квадратов.

Задача 4. (7 баллов) Палиндромом называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково, например 12521. Найдите наибольший пятизначный палиндром, делящийся на 35.
Ответ: 59395.
Решение. Последняя цифра, а значит, и первая должны быть равны 5, чтобы обеспечить делимость на 5. Максимальная возможная вторая цифра – это 9. Далее перебором убеждаемся, что единственная возможная третья цифра, для которой число кратно 7, – это 3. В итоге получаем число, указанное в ответе.

Задача 5. (9 баллов) Петров и Васечкин чинили забор. Каждому надо было прибить одно и то же количество досок. Петров забивал в некоторые доски по два гвоздя, а в остальные – по три. Васечкин забивал в некоторые доски по три гвоздя, а в остальные – по пять. Сколько досок прибил каждый из них, если известно, что Петров забил 87 гвоздей, а Васечкин – 94 гвоздя?
Ответ: 30.
Решение. Если бы во все доски было забито по три гвоздя, то всего гвоздей было бы в 3 раза больше, чем досок, то есть получилось бы число от 87 до 94, делящееся на 3. Кроме того, полученное число должно отличаться от 94 на чётную величину, а значит, и само должно быть чётным. Такое число только одно – это 90. Следовательно, утроенное число досок равно 90, откуда и получаем ответ.

Задача 6. (11 баллов) Белоснежка и семь гномов все разного роста. Они делают фото на память: один гном фотографирует, остальные становятся в ряд с Белоснежкой посередине, а с обеих сторон рост гномов при приближении к краю уменьшается. Сколько фотографий с разным порядком участников можно получить?
Ответ: 140.
Решение. Выбрать фотографа можно семью способами, и для каждого из них $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ способами можно выбрать левую тройку гномов. Правая тройка определится однозначно, и порядок гномов в каждой тройке – тоже. Итого получаем $7\cdot 20 = 140$ возможных фотографий.

Задача 7. (12 баллов) Ученики и ученицы музыкальной школы по очереди выступают на сцене, а затем возвращаются в зал в качестве зрителей. Во время Жениного выступления девочки составляли $\frac{2}{5}$, а во время Сашиного – $\frac{7}{17}$ сидящих в зале учеников. Сколько учеников пришло на концерт?

Ответ: 86.

Решение. Указанные в условии дроби равны $\frac{34}{85}$ и $\frac{35}{85}$. Они отличаются ровно потому, что один раз в зале не было Жени, а в другой – Саши, поэтому Женя и Саша разного пола, а в зале во время их выступлений было 85 зрителей.

Задача 8. (13 баллов) В мешке лежат 60 яблок: красные, жёлтые и зелёные. Если вытащить любые 50 из них, то среди них обязательно найдутся три яблока разного цвета. Какое наименьшее число яблок необходимо вытащить, чтобы среди них гарантированно нашлось два яблока разного цвета?

Ответ: 39.

Решение. Яблок любых двух цветов вместе не более 49, поэтому яблок третьего цвета не менее 11. Так как это верно для всех трёх цветов, то яблок каждого цвета не более 60 − 11 − 11 = 38. Значит, если вытащить 39 яблок, то среди них заведомо найдутся два яблока разного цвета.

Если же, например, красных и жёлтых яблок по 11, то 38 яблок вытащить недостаточно: они могут все оказаться зелёными.

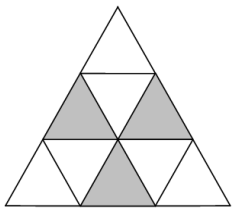
Задача 9. (15 баллов) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, в котором *AB* = 10, *BC* = *CD* = 5, *DA* = 4, а диагональ *AC* является биссектрисой угла *A*.

Ответ: 28.

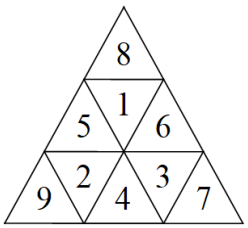
Решение. Опустим перпендикуляры *CE* и *CF* на прямые *AB* и *AD* соответственно. Так как точка *C* лежит на биссектрисе угла *A*, то эти перпендикуляры равны, а также равны отрезки *AE* и *AF*. Прямоугольные треугольники *CBE* и *CDF* равны по катету и гипотенузе, поэтому из равенств *AE* + *BE* = 10 и *AF* − *DF* = 4 получаем *AE* = *AF* = 7 и *BE* = *DF* = 3. По теореме Пифагора *CE* = *CF* = 4, откуда площадь четырёхугольника *ABCD* находим как сумму площадей треугольников *ABC* и *ADC*: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 28$.

Задача 10. (15 баллов) Равносторонний треугольник со стороной 3 разделён прямыми, параллельными сторонам, на девять маленьких треугольников со стороной 1. В эти треугольники вписаны числа 1, 2, …, 9. Оказалось, что сумма четырёх чисел в каждом из треугольников со стороной 2 равна чётному числу *n*. Найдите наибольшее возможное значение *n*.

Ответ: 20.



Решение. *Оценка*. Рассмотрим сумму чисел в трёх треугольниках со стороной 2. В ней числа из белых клеток будут учтены по одному разу, а числа из чёрных клеток – дважды (см. рисунок). Значит, с одной стороны, эта сумма равна 3*n*, а с другой – (1 + 2 + … + 9) + *S* = 45 + *S*, где *S* – сумма чисел в чёрных клетках. Так как *S* ≤ 7 + 8 + 9 = 24, то 3*n* ≤ 45 + 24 = 69, откуда *n* ≤ 23. По условию *n* чётно, поэтому *n* ≤ 22.



Предположим, что существует расстановка чисел, в которой *n* = 22. Тогда *S* = 3·22 − 45 = 21, следовательно, в каждом белом ромбе сумма чисел на 1 больше, чем в противоположной чёрной клетке. При этом единица записана в белой клетке, поскольку даже 1 + 8 + 9 < 21. Но тогда число, находящееся в одном ромбе с единицей, равно числу в противоположной чёрной клетке. Полученное противоречие доказывает, что *n* ≤ 20.

Пример см. на рисунке.