Ответы и решения задач «белого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Велосипедист выехал из города А в город Б, находящийся на расстоянии 150 км. Навстречу ему из города Б в то же время со втрое большей скоростью выехал мотоциклист. Через 2 часа они встретились. Через какое время после этого велосипедист доедет до Б?
Ответ: через 6 часов.
Решение. Велосипедист едет втрое медленнее, поэтому на участок пути, который мотоциклист проехал за 2 часа, ему потребуется 6 часов.

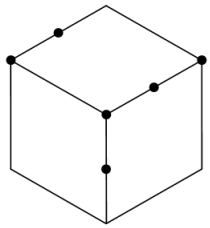
Задача 2. (6 баллов) На каждой из двух параллельных прямых отметили по три точки. Сколько существует различных треугольников с вершинами в отмеченных точках?
Ответ: 18.
Решение. Две вершины треугольника должны лежать на одной прямой, а третья – на другой. Первую прямую можно выбрать двумя способами, после чего тремя способами выбираются две точки на ней и ещё тремя – точка на другой прямой. Итого получаем 2·3·3 = 18 треугольников.

Задача 3. (6 баллов) На съезде рыцарей и лжецов присутствовали представители обоих племён (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут). Каждый сделал ровно одно из двух утверждений: «Среди нас ровно 5 лжецов» или «Среди нас ровно 6 рыцарей». Какое двузначное число НЕ может быть количеством участников съезда?
Ответ: 11.
Решение. Если рыцарь сделал какое-то утверждение, то такое же утверждение не мог сделать ни один лжец. Поэтому либо среди собравшихся 5 лжецов и НЕ 6 рыцарей, либо 6 рыцарей и НЕ 5 лжецов. Таким образом, количество участников съезда не может быть равно 11.
С другой стороны, на съезде может быть 6 рыцарей и сколько угодно лжецов, кроме 0 и 5. Следовательно, возможно любое двузначное количество участников, кроме 11.

Задача 4. (7 баллов) Палиндромом называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково, например 12521. Напишите наибольший пятизначный палиндром, делящийся на 15.
Ответ: 59895.
Решение. Последняя цифра, а значит, и первая должны быть равны 5, чтобы обеспечить делимость на 5. Максимальная возможная вторая цифра – это 9, а максимальная третья, для которой сумма цифр числа будет кратна 3, – это 8. В итоге получаем число, указанное в ответе.

Задача 5. (9 баллов) В каждом из четырёх уровней МатКэта – по десять задач, и ровно три задачи из каждого уровня встречаются в каких-то других уровнях. Какое наибольшее число различных задач может оказаться во всех вариантах вместе?
Ответ: 34.
Решение. *Оценка*. В каждом варианте есть 10 − 3 = 7 уникальных задач, всего это 7·4 = 28 задач. Каждая из остальных 3·4 = 12 задач встречается хотя бы дважды, что даёт ещё не более 12:2 = 6 задач. Итого в вариантах не больше 28 + 6 = 34 задач.
Пример. Пусть первые два уровня пересекаются по трём задачам и последние два уровня тоже. Тогда всего в вариантах ровно 34 различные задачи.

Задача 6. (11 баллов) Какое наименьшее количество точек можно отметить на поверхности куба так, чтобы на любых двух гранях было различное количество отмеченных точек?
Ответ: 6.
Решение. *Оценка*. Сложив количества точек на всех гранях, получим сумму не меньше 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Так как каждая точка принадлежит не более чем трём граням, то всего точек не меньше 15:3 = 5. Если их пять, то все сделанные ограничения должны обращаться в равенства. В частности, все точки должны находиться в вершинах куба, но тогда ни на какой грани нет пяти точек. Полученное противоречие доказывает, что точек не меньше шести. *Пример* см. на рисунке.



Задача 7. (13 баллов) Найдите значение выражения $\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)^2$.

Ответ: 4.

Решение 1. Заметим, что $8+2\sqrt{7} = 7+2\sqrt{7}+1 = \left(\sqrt{7}+1\right)^2$ и $8-2\sqrt{7} = 7-2\sqrt{7}+1 = \left(\sqrt{7}-1\right)^2$, поэтому $\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)^2 = \left(\left(\sqrt{7}+1\right)-\left(\sqrt{7}-1\right)\right)^2 = 2^2 = 4$.

Решение 2. По формуле квадрата разности получаем $\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)^2 =$

$8+2\sqrt{7}-2\sqrt{(8+2\sqrt{7})(8-2\sqrt{7})}+8-2\sqrt{7} = 16-2\sqrt{64-28} = 16 - 2\cdot 6 = 4$.

Задача 8. (13 баллов) Число m равно 99…9 (100 девяток). Найдите сумму цифр числа m^3.

Ответ: 1800.

Решение. Представим число m в виде $10^{100} - 1$. Тогда $m^3 = (10^{100} - 1)^3 = 10^{300} - 3\cdot 10^{200} + 3\cdot 10^{100} - 1 = \underbrace{100\ldots0}_{300} - 3\underbrace{00\ldots0}_{200} + 3\underbrace{00\ldots0}_{100} - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{99}7\underbrace{00\ldots0}_{99}2\underbrace{99\ldots9}_{100}$. Сумма цифр этого числа равна $9\cdot 199 + 7 + 2 = 9\cdot 200 = 1800$.

Задача 9. (15 баллов) Учительница придумывает ребус для своих учеников. Она написала БАО + БА + Б = … и задумалась, какое трёхзначное число можно написать справа от знака равенства, чтобы у ребуса было решение (Б не должно быть равно нулю, а разные буквы должны обозначать разные цифры). Сколько существует способов это сделать?

Ответ: 576.

Решение. Легко видеть, что Б не может равняться 9 (иначе сумма будет четырёхзначной), а на значения остальных букв ограничений нет (кроме того, что они разные). Поэтому есть $8\cdot 9\cdot 8 = 576$ способов шифровки. Докажем, что разным способам шифровки соответствуют разные результаты. Представим сумму в виде $111\cdot$Б $+ 11\cdot$А $+$ О и заметим, что изменение Б меняет её хотя бы на 111, что нельзя компенсировать изменением А и О (любое такое изменение меняет сумму не больше чем на $11\cdot 9 + 9 = 108$), а изменение А меняет сумму хотя бы на 11, что нельзя компенсировать изменением О.

Задача 10. (15 баллов) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена такая точка E, что $AE = AB$. Из вершины C на отрезок BE опущен перпендикуляр. Он пересекает диагональ BD в точке O, а его основание делит отрезок BE в отношении 1:3. Чему равна длина отрезка BO, если $DO = 4$?

Ответ: 6.

Решение. Отметим на стороне BC такую точку F, что $CF = CD$. Тогда $BEDF$ – параллелограмм, поскольку его стороны ED и FB равны и параллельны. Пусть CG – перпендикуляр, о котором идёт речь в условии, и он пересекает отрезок DF в точке H. Так как $DF \parallel BE$, то отрезок CH – высота в равнобедренном треугольнике CDF, а значит, он является и медианой, то есть $DH = FH$.

Обозначим $EG = x$, $BG = 3x$. Из равенства $DF = BE$ получаем, что $DH = FH = 2x$, а из подобия треугольников BOG и DOH – $\frac{BO}{DO} = \frac{BG}{DH} = \frac{3}{2}$, откуда $BO = \frac{3}{2}DO = 6$.