Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Рано утром Миша и Серёжа пошли навстречу друг к другу и встретились через 60 минут ровно посередине между их домами. В обед они поехали из своих домов на велосипедах навстречу друг другу и снова встретились посередине, но уже через 30 минут после старта. Сколько минут пройдёт до их встречи, если вечером, выйдя из своих домов, Миша поедет на велосипеде, а Серёжа пойдет пешком? (Все скорости постоянны. Скорость Серёжи пешком и скорость Миши на велосипеде всегда одинаковые.)

Ответ: 40

Решение: Из условия становится ясно, что скорости Миши и Серёжи и пешком, и на велосипеде равны, так как встреча произошла посередине пути. Причём скорость движения на велосипеде в 60 : 30 = 2 раза больше скорости движения пешком. Тогда вечером Серёжа пройдёт лишь треть пути до встречи с Мишей (т.к. его скорость в 3 раза меньше их скорости сближения) и потратит на это 60 · 2 : 3 = 40 минут.

Задача 2. (5 баллов) За круглым столом сидят 4 гостя. На завтрак им принесли 37 пирожков. Оказалось, что каждый гость съел либо в 2 раза больше пирожков, либо на 2 меньше, чем его сосед справа. Какое наибольшее число пирожков могли съесть гости?

Ответ: 36

Решение: Покажем, что каждый гость съел чётное число пирожков. Отсюда будет следовать, что гости не могли съесть все 37 пирожков, а максимум 36. Действительно, кто-то должен был съесть в 2 раза больше пирожков, чем его сосед справа, и тогда каждый съест чётное число пирожков. Иначе каждый гость съел бы на 2 пирожка меньше, чем его сосед справа, и тогда первый гость съел бы на 2 · 4 = 8 пирожков меньше, чем он сам. Тогда кто-то съел чётное число пирожков, и остальные – тоже. Покажем, что гости могли съесть 36 пирожков: 8, 6, 12, 10.

Задача 3. (7 баллов) Костя подумал, что если любое натуральное число умножить на 103 и прибавить к произведению 1, то результат будет делиться на 104. Серёжа предложил проверить Костино предположение на числе 23: 23 · 103 = 2369, 2369 + 1 = 2370 – это число не делится на 104. А какое наибольшее трёхзначное число после действий Кости даст результат, кратный 104?

Ответ: 937

Решение: Пусть n – трёхзначное число. После действий Кости получается число $103n + 1$. Это число должно делиться на 104. Заметим, что $103n + 1 = 104n - n + 1 = 104n + (1 - n)$. Так как $104n$ делится на 104, то $103n + 1$ делится на 104 тогда и только тогда, когда $(1 - n)$ делится на 104, то есть $(n - 1)$ делится на 104. Таким образом, $n = 104k + 1$, где k – целое число, принимающее значения от 1 до 9. Тогда наибольшее искомое трёхзначное число равно 104 · 9 + 1 = 937.

Задача 4. (9 баллов) На доске записаны в ряд три числа. Саша продолжает этот ряд вправо: каждое новое число равно сумме самого правого и третьего справа числа. Например, четвёртое число равно сумме третьего и первого, пятое число равно сумме четвертого и второго, и так далее. Так он дописал пять чисел. Сумма всех восьми чисел оказалась равна 423. Найдите сумму четвёртого, пятого и шестого чисел.

Ответ: 141

Решение: Выпишем первые восемь чисел: a, b, c, $a + c$, $a + b + c$, $a + b + 2c$, $2a + b + 3c$, $3a + 2b + 4c$. Тогда сумма всех чисел равняется $9a + 6b + 12c = 423$. Заметим, что искомая сумма равна
$(a + c) + (a + b + c) + (a + b + 2c) = 3a + 2b + 4c$, что составляет треть от суммы всех написанных чисел. Таким образом, ответ равен 423 : 3 = 141.

Задача 5. (10 баллов) Серёжа выписал на доску k натуральных чисел, дающих в сумме 239. Оля посчитала у каждого числа его сумму цифр и записала результаты в ряд на вторую доску. Оказалось, что во втором ряду каждое число, кроме первого, на одно и то же натуральное число больше предыдущего. При каком наибольшем k такое могло произойти?

Ответ: 13

Решение: Очевидно, что числа в Олином ряду отличаются хотя бы на 1. Выпишем наименьшие числа (*n min*) с заданной суммой цифр (*S*(*n*)):

S(*n*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Найдём, что сумма 14-ти чисел из второй строки равна 1 + 2 + … + 19 + 29 + 39 + 49 + 59 = 240. Следовательно, $k < 14$. Пример для $k = 13$ сразу же строится: 2 + … + 19 + 29 + 39 + 49 + 59= 239.

Задача 6. (10 баллов) Вершины шестиугольника лежат в серединах сторон клеток, как показано на рисунке 1. Вычислите серую площадь внутри шестиугольника, если площадь клетки равна 1.

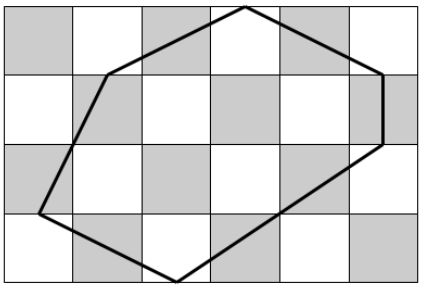
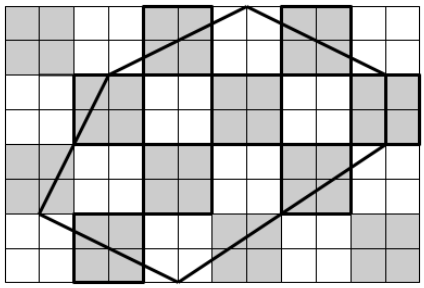


Рисунок 1

Ответ: 6 (кв. ед.)

Решение: Разделим каждую клетку на 4 меньших квадратика. Выделенные серые клетки либо наполовину входят в состав фигуры, либо дополняют другие клетки до целой.

Задача 7. (12 баллов) В многодетной семье у каждого ребёнка спросили: «Сколько у тебя братьев?». Каждый из детей назвал одно натуральное число, а сумма всех названных чисел оказалась равна 32. Сколько детей в семье, если все дети ответили правильно?



Ответ: 9 или 17

Решение: Пусть m – количество мальчиков, d – количество девочек, тогда общее количество детей $n = m + d$. Каждый мальчик сказал, что у него $m-1$ брат, а каждая девочка — что у неё m братьев. Сумма ответов: $m(m-1) + d\cdot m = m(m-1+d) = m(n-1) = 32$. Так как m и $n-1$ – натуральные числа, то m является делителем 32. Делители 32: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Из условия неотрицательности количества девочек следует, что $n-1 \geq m-1$, то есть $32/m \geq m-1$, откуда $m(m-1) \leq 32$. Это неравенство выполняется только для $m=1$, $m=2$ и $m=4$. Но если $m=1$, то мальчик назвал бы число 0, что не является натуральным числом, поэтому $m\geq 2$. Тогда $n = 32/m + 1$: для $m=2$ получаем $n=17$, для $m=4$ получаем $n=9$. Таким образом, возможное количество детей в семье — 9 или 17.

Задача 8. (13 баллов) На восьми игральных кубиках написаны все натуральные числа от 1 до 48 (по одному на каждой грани, без повторений). Света может перед броском кубиков взмахнуть волшебной палочкой – и на каждом кубике выпадет наибольшее из шести чисел, написанных на его гранях. Какую сумму чисел может гарантированно получить Света, бросив все кубики?

Ответ: 216

Решение: Обозначим через M_i наибольшее число на i-м кубике (i = 1, …, 8) и упорядочим кубики так, чтобы $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_8$. Поскольку на всех восьми кубиках вместе записаны все числа от 1 до 48, на первом кубике находятся 6 различных чисел, не превосходящих M_1, откуда $M_1 \geq 6$, на первых двух кубиках – 12 различных чисел, не превосходящих M_2, значит $M_2 \geq 12$, аналогично получаем $M_3 \geq 18$, $M_4 \geq 24$, $M_5 \geq 30$, $M_6 \geq 36$, $M_7 \geq 42$ и $M_8 \geq 48$. Следовательно, сумма наибольших чисел на кубиках *не меньше* 6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36 + 42 + 48 = 216. Эта сумма достижима, например, если числа распределены по кубикам так: на первом кубике написаны числа от 1 до 6, на втором – от 7 до 12, …, на последнем – от 43 до 48, – тогда Света получит *ровно* 216.

Задача 9. (14 баллов) В остроугольном треугольнике ABC из каждого угла провели биссектрису и высоту. Юля нашла углы между биссектрисой и высотой угла A — 4°, угла B — 12°. Найдите градусную меру угла между биссектрисой и высотой угла C?

Ответ: 8 или 16

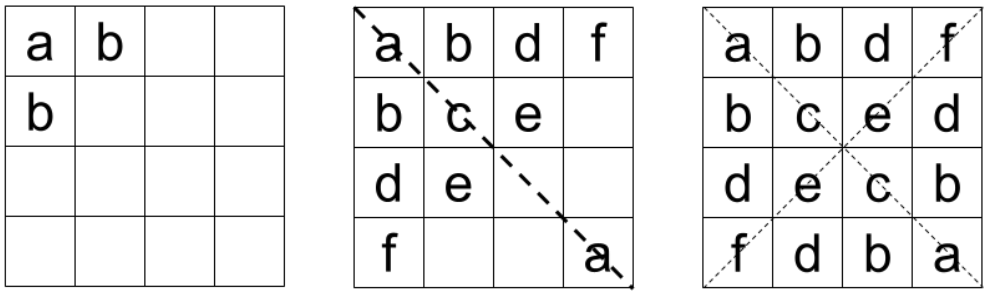
Решение: Угол между биссектрисой и высотой в угле треугольника равен половине модуля разности двух других углов. Обозначим углы между биссектрисой и высотой из вершин A, B и C как α, β и γ

соответственно. Тогда $\alpha = |B-C|/2 = 4°$, $\beta = |A-C|/2 = 12°$, $\gamma = |A-B|/2$. Заметим, что γ может равняться либо сумме α и β, либо их разности: $\gamma = \alpha+\beta = 16°$ или $\gamma = |\alpha-\beta| = 8°$. Таким образом, угол между биссектрисой и высотой угла C равен 16° или 8°.

Задача 10. (15 баллов) Люда красит все клетки квадрата 4 × 4 в чёрный и белый цвета. Раскраска ей нравится, если у каждой клетки нечётное число соседних по стороне клеток белого цвета. Сколько различных раскрасок могут понравиться Люде?

Ответ: 16

Решение: Выберем самую верхнюю строку в квадрате и покрасим все клетки этой строки произвольным образом в чёрный и белый цвета. Это можно сделать $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способами. Далее заметим, что цвет каждой клетки в строках ниже определён однозначно, т.к. у каждой клетки предыдущей строки покрашены все соседние клетки кроме одной. Таким образом, раскраска верхней строки задаёт цвет всех остальных строк. Причем для всех строк, кроме самой нижней, условие задачи автоматически выполняется.



Покажем, что условие задачи выполняется и для самой нижней строки. Для этого докажем на примере доски 4 × 4, что любая раскраска клеток с требуемым условием центрально-симметрична относительно центра квадрата. Покрасим верхнюю правую угловую клетку в цвет *a* (не важно, какой именно это цвет: белый или чёрный). Ясно, что соседние с этой клетки покрашены в один цвет – обозначим *b (тут и далее разными буквами мы будем обозначать цвета, причём разные буквы могут обозначать один и тот же цвет, а могут разный, нам лишь важно, что одинаковые буквы обозначают один и тот же цвет).* Далее обозначим цвет клетки, расположенной по диагонали от клетки цвета *a* – *c*. Тогда у клеток цвета *b* есть две соседние клетки цветов *a* и c, тогда третьи соседние клетки будут одного цвета – цвета *d*. У клетки цвета *c* есть две соседние клетки одного цвета (*b*), тогда две оставшиеся соседние клетки будут одного цвета – цвет *e*. Продолжая рассуждение, получим, что две угловые клетки тоже одного цвета – цвет *f*, а раскраска симметрична относительно диагонали *a-a* (показана на рисунке пунктиром). А теперь начнём все те же рассуждения с правой верхней угловой клетки – получим, что раскраска симметрична относительно диагонали *f-f*, то есть центрально-симметрична относительно центра квадрата. Для квадратов других размеров все рассуждения аналогичны.

Завершим доказательство. Для двух верхних строк условие выполнено, следовательно, оно выполнено и для двух нижних строк, в том числе для самой нижней.