# Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

**Задача 1. (5 баллов)** К натуральному числу $N$ приписали справа цифру 6, в результате чего оно увеличилось на 2031. Найдите $N$.
**Ответ:** 225
**Решение:** Приписать цифру к концу числа N — то же самое, что умножить N на 10 и прибавить эту цифру. Тогда $10N + 6 = N + 2031$, откуда $N = 225$.

**Задача 2. (6 баллов**) В студенческой группе 40 студентов, у каждого из которых есть три результата: баллы по математике, баллы по физике и баллы по химии. Ровно у 13 студентов баллы по математике и физике равны. Ровно у 19 студентов баллы по математике и химии различны. Найдите минимально возможное число студентов, у которых баллы по физике и химии различны.
**Ответ:** 8
**Решение:** У 21 студента баллы по математике и химии равны. Максимум у 13 из них баллы равны с физикой. Значит, хотя бы у 8 студентов баллы различны. Такое бывает, если, например, у 13 студентов равны баллы за все три предмета, еще у 8 студентов равны баллы за математику и химию, а балл по физике другой, а у всех оставшихся 19 студентов балл по физике совпадает с химией, но отличается от математики.

**Задача 3. (8 баллов)** Есть 23 монеты достоинством 1, 2, …, 23 копейки. Два игрока по очереди забирают по три монеты. Когда остаются две монеты, первый игрок получает выигрыш, равный разности их номиналов. Какой максимальный выигрыш он может обеспечить себе при любой игре соперника?
**Ответ:** 13
**Решение:** Покажем, что первый всегда может получить разность 13. Первым ходом он уберёт монеты 11, 12 и 13, а далее разобьёт все числа на пары с разностью 13. Каждым ходом второй либо забирает три числа из разных пар, либо забирает одну пару целиком и одно число из другой пары. В первом случае первый забирает все оставшиеся числа из этих пар, а во втором — одно оставшееся число и одну любую целую пару. В конце останутся числа из одной пары, значит, разница будет 13. Покажем теперь, что второй может не позволить первому получить больше 13. Пусть он забирает каждый раз три самых больших числа; так как он сделает три хода, то вычеркнет 9 чисел. Значит, чисел от 15 до 23 на доске точно не будет, а значит, максимальная оставшаяся разность между 1 и 14 - ровно 13.

**Задача 4. (8 баллов)** Точка $E$ на стороне $BC$ параллелограмма $ABCD$ такова, что прямые $AE$ и $BD$ перпендикулярны. Точка $F$ на стороне $AD$ равноудалена от вершин $B$ и $D$. Известно, что $AF = 7$, а $BE = 5$. Найдите $BF$.
**Ответ:** 12
**Решение:** Пусть $G$ - точка стороны $BC$, равноудаленная от $B$ и $D$. Тогда $FG$ - серединный перпендикуляр к диагонали параллелограмма, т.е. $FG \parallel AE$. Следовательно, четырёхугольник $AEGF$ — параллелограмм, и $EG = AF = 7$. Отсюда $BG = 7 + 5 = 12$, а так как $BFDG$ ромб, то $BF = BG$.

**Задача 5. (10 баллов)** Петя каждый день ест конфеты. За любые 3 подряд идущих дня он съедает не больше 10 конфет, а за любые 5 подряд идущих дней съедает не больше 18 конфет. А какое наибольшее количество конфет он может съесть за 23 дня?
**Ответ:** 78
**Решение:** Разобьем 23 дня на шесть групп по три дня и одну группу в пять дней. Тогда он съест не больше чем 18+6·10=78 конфет. При этом есть случай, когда будет именно 78: в первый день он съел 6 конфет, во второй 2, и в третий тоже 2. А далее повторял эту последовательность из трех дней: 6,2,2,6,2,…6,2.

**Задача 6. (10 баллов)** Ленивая мышь и сыр находятся на поле, состоящем из сот-шестиугольников, как показано на рисунке 1. За один ход она может перейти из соты в любую соту, соседнюю с ней по стороне. При этом она:
1) никогда не ходит в соту, которая выше, чем та, в которой она стоит;
2) никогда не возвращается в соту, в которой уже была.
Сколько у Мыши способов дойти до сыра?
**Ответ:** 3840
**Решение:** Заметим, что для любых двух сот А и Б внутри одного горизонтального ряда существует ровно один способ попасть из А в Б. Значит, зная места, где мышь переходила между рядами, мы можем однозначно восстановить ее маршрут. Если пронумеровать ряды, начиная с 1, то количество способов спуститься с ряда с номером $k$ на

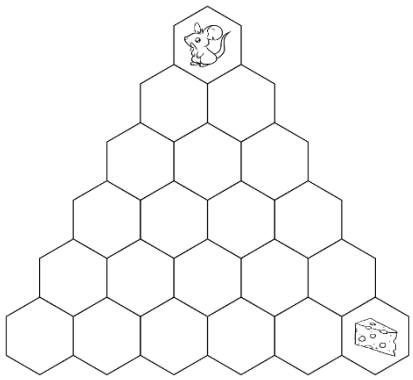

*Рисунок 1*

следующий будет $2k$, так как в $k$-том ряду всего $k$ сот, у каждой из которых по две общих стороны со следующим рядом. Значит, способов дойти до любой клетки $n$-го ряда будет
$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) = 2^{(n-1)} \cdot (n-1)!$. Подставив $n = 6$, найдем ответ $2^5 \cdot 5! = 32 \cdot 120 = 3840$

**Задача 7. (12 баллов)** Три спортсмена — Алексей, Борис и Виктор — участвуют в забеге на 1200 метров. Виктор и Борис стартуют с одного конца дорожки, а Алексей — с противоположного, все одновременно. К моменту встречи с Виктором Алексей пробежал на 20% меньше, чем оставшийся путь Бориса до финиша после этого момента. В момент, когда Алексей пробежал 600 метров, Виктор ещё не финишировал. Сколько метров было между Борисом и Виктором в этот момент?
**Ответ:** 150
**Решение:** В условии сказано, что в момент встречи Алексея и Виктора расстояние между Борисом и Виктором составляло 20% от оставшегося пути Бориса, а расстояние, пройденное Алексеем – 80%. Значит, скорость Алексея в четыре раза больше разности скоростей Виктора и Бориса, откуда получаем 600:4=150 метров.

**Задача 8. (13 баллов)** Вася задумал арифметическую прогрессию из трех целых чисел. Ваня прибавил 1 ко второму числу и 22 к третьему. Получилась геометрическая прогрессия с целым ненулевым знаменателем. Каким мог быть этот знаменатель?
**Ответ:** -1; 2; 3
**Решение:** Пусть $a$ – первый член прогрессии, $d$ – шаг арифметической прогрессии, $q$ – знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $aq = (a + d + 1)$ и $aq^2 = (a + 2d + 22)$. Вычтем из второго уравнения первое, умноженное на два, и получим $aq^2 - 2aq = (a + 2d + 22) - 2(a + d + 1)$ , то есть $a(q-1)^2 = 20$. Тогда $(q-1)^2$ – делитель 20, что возможно только если $(q-1)^2 = 1$ или $(q-1)^2 = 4$.
Откуда $q \in \{-1; 0; 2; 3\}$.
Последовательности для каждого $q$:
$q = -1; a = 5; d = -11$ арифметическая прогрессия $5; -6; -17$, геометрическая $5; -5; 5$.
$q = 2; a = 20; d = 19$ арифметическая прогрессия $20; 39; 58$, геометрическая $20; 40; 80$.

$q = 3; a = 5; d = 9$ арифметическая прогрессия $5; 14; 23$ , геометрическая $5; 15; 45$.

**Задача 9. (13 баллов)** В каждой клетке доски 4×7 стоит буква Г или буква В. Буква выбирается случайным образом для каждой клетки. Для каждой клетки считается суммарное количество букв Г, которые стоят в строке, содержащей эту клетку, и букв В, которые стоят в столбце, содержащем эту клетку. Если это количество четное, то клетка закрашивается в черный цвет, а если нечетное – в белый. Найдите математическое ожидание количества черных клеток.
**Ответ:** 14
**Решение:** Выберем любую клетку А и любую клетку Б, лежащую в одной строчке или в одном столбце с А. Заменив букву в клетке Б на противоположную, мы также поменяем цвет клетки А. Значит, для любой клетки, вероятность того, что она черная, равна $\frac{1}{2}$. Математическое ожидание количества черных клеток это $28 \cdot \frac{1}{2} = 14$.

**Задача 10. (15 баллов)** Найдите все значения $a$, при которых уравнение $a = \sqrt[3]{x^2 - 6x + 16} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 8}$ имеет нечетное число решений.
**Ответ:** 4
**Решение:** выделив полные квадраты $a = \sqrt[3]{(x-3)^2 + 7} + \sqrt[3]{(x-1)^2 + 7}$, можно заметить, что под корнями получились выражения, которые переходят друг в друга при замене $x$ на $4 - x$, то есть для каждого корня существует корень симметричный относительно прямой $x = 2$. Значит, если корней нечетное количество, то $x = 2$ должен быть корнем. Подставив в выражение, найдем $a = 4$.