Ответы и решения задач «белого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) На полке у Вани в ряд стоят 5 игрушек: корова, космический корабль, обезьяна, кенгуру и волк. Известно, что рядом с кенгуру нет животных, обезьяна стоит с правого краю, а между космическим кораблём и коровой ровно одна игрушка. В каком порядке (слева направо) игрушки стоят на полке?

Ответ: кенгуру - космический корабль - волк - корова - обезьяна.

Решение: Обезьяна стоит с правого краю, значит, она находится на пятом месте. Около кенгуру нет животных, единственное “не животное” - космический корабль, тогда кенгуру тоже находится с краю, на первом месте, а рядом с ним космический корабль на втором месте. Между космическим кораблём и коровой одна игрушка, так как слева космический корабль второй с краю, то корова на четвёртом месте, через единственную оставшуюся игрушку - волка. Тогда расположение игрушек - кенгуру-космический корабль-волк-корова-обезьяна.

Задача 2. (6 баллов) Животные собрались на поляне, чтобы поиграть в футбол. Всего пришло 5 собак, 11 гусей, 3 жирафа, 3 кенгуру и 10 мышей. Какое количество страусов нужно позвать, чтобы все животные разделились ровно на 6 команд, в каждой из которых было бы одинаковое количество двуногих и четвероногих животных? У биологов есть разное мнение о "n-ногости" разных животных, поэтому будем считать кенгуру двуногим.

Ответ: 4.

Решение: Четвероногие животные - это собаки, жирафы и мыши, их всего 5+3+10=18 штук. Если их делить на 6 команд, то в каждой будет по 3 четвероногих животных. Чтобы четвероногих и двуногих животных было одинаковое количество, необходимо 18 двуногих животных. Имеется 11 гусей и 3 кенгуру, то есть 14 животных. Значит, достаточно 4 страусов, чтобы в командах было по 3 двуногих животных.

Задача 3. (8 баллов) В отделе закупок работает 12 человек, их средний возраст - 24,5 лет. В отдел набирают людей на стажировку. Всего пришло 14 человек кандидатов, и их средний возраст - 20,5 лет. На стажировку из них взяли восемь человек, средний возраст остальных кандидатов оказался 23,5 года. Каким стал средний возраст сотрудников и стажёров отдела закупок вместе?

Ответ: 22 года.

Решение: Суммарный возраст сотрудников отдела - 24,5*12=294 года. Подсчитаем суммарный возраст кандидатов. Общий возраст кандидатов - 20,5*14=287 лет, общий возраст 14-8=6 невзятых кандидатов - 23,5*6=141 год, тогда общий возраст взятых кандидатов - 287-141=146 лет. Общий возраст сотрудников и стажёров тогда 294+146=440 лет, а их 12+8=20 человек. Тогда средний возраст этой группы - 440/20=22 года.

Задача 4. (8 баллов) Кусок мела - прямоугольный брусок. Каждый урок расходуется одинаковое количество мела. Через 30 уроков кусок уменьшился ровно в 4 раза по длине, в 2 раза по высоте и в 2 раза по ширине. На сколько ещё уроков хватит оставшегося кусочка мела при таком же расходе?

Ответ: 2.

Решение: Примем изначальный объём куска мела за V=a*b*c, тогда после 30 уроков его объём стал равен $\frac{a}{4}*\frac{b}{2}*\frac{c}{2}=\frac{a*b*c}{16}=\frac{V}{16}$, тогда за 30 уроков израсходовано $\frac{15*V}{16}$ куска, то есть за каждый урок (при упрощении, данном в условии) используется $\frac{15*V}{16}*\frac{1}{30}=\frac{V}{32}$ куска мела, тогда остаток как раз равен расходу за 2 урока.

Задача 5. (10 баллов) Грани игрального кубика пронумерованы различными числами от 1 до 6 так, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7. Света склеила столбик из 7 одинаковых игральных кубиков (см.рис.1). Какова минимальная сумма чисел, расположенных на всех не склеенных гранях столбика?

Ответ: 100.

Решение: На каждом кубике изображены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сумма чисел на одном кубике - 1+2+3+4+5+6=21, на всех кубиках - 7*21=147. У нижнего и верхнего кубиков склеена только одна грань, чтобы сумма не склеенных чисел была минимальна, у этих кубиков склеить нужно грань с числом 6. Кубики 2-6 склеены двумя противоположными гранями, сумма которых всегда равна 7, то есть в независимости от того, как эти кубики располагать,

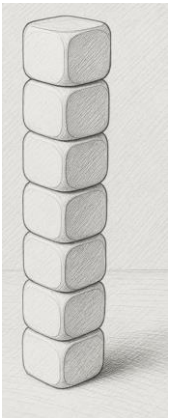

Рисунок 1

числа на склеенных гранях в сумме всегда дают 7. Тогда сумма чисел на всех склеенных гранях равна 6+6+5*7=47. Тогда сумма чисел на не склеенных гранях - 147-47=100.

Задача 6. (10 баллов) На рисунке 2 изображён квадрат площади 11. Одна из его диагоналей разделена на три равные части. Ромб построен так, что одна диагональ квадрата и средняя треть его другой диагонали являются диагоналями ромба. Чему равна площадь этого ромба?

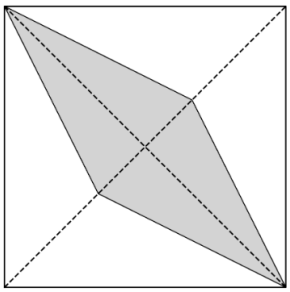

Рисунок 2

Ответ: $\frac{11}{3}$ (возможна запись $3\frac{2}{3}$).

Решение: Площадь ромба - полупроизведение его диагоналей, то есть $S = \frac{1}{2} * d_1 * d_2$. Если у квадрата площадь 11, то его сторона - $\sqrt{11}$, а диагональ - $\sqrt{22}$ (по теореме Пифагора). Длина первой диагонали равна длине диагонали квадрата, то есть $\sqrt{22}$, а длина второй диагонали - треть длины диагонали квадрата, то есть $\frac{\sqrt{22}}{3}$. Тогда площадь ромба - $S = \frac{1}{2} * \sqrt{22} * \frac{\sqrt{22}}{3} = \frac{11}{3}$.

Задача 7. (10 баллов) Лена кидает дротики в мишень. Вначале у неё есть 4 дротика. За попадание в зоны 9 или 10 мишени она получает 7 дополнительных дротиков, за попадание в зоны 7 или 8 - 4 дополнительных дротика, за попадания в остальные зоны и промахи она дротики не получает. Сколько раз она попала в зоны 9 или 10, если сделала 41 бросок и дротики у неё закончились?

Ответ: 3.

Решение: Лена кинула дротики 41 раз, а изначально у неё их было 4, значит, “призовых” дротиков за попадание в 7-8-9-10 она получила 41-4=37 штук. 37 - это некоторая комбинация 7 и 4 дротиков, которые ей дали за успешные попадания. То есть нам нужно разбить 37 на несколько слагаемых, равных 7 и 4. Легко убедиться в том, что такая комбинация слагаемых только одна - 37=7*3+4*4. Тогда Катя попала в 9 или 10 всего 3 раза.

Задача 8. (12 баллов) В Брейн-ринг играли 25 команд. Их разделили на три группы: в двух группах по 8 команд, а в третьей - 9. В игре каждый раз участвуют две команды. Каждая команда играла с каждой из своей группы ровно один раз. Затем в финал вышли по две команды из каждой группы. В финале каждая из этих команд играла с каждым финалистом ровно один раз. Сколько всего прошло игр?

Ответ: 107.

Решение: В группе из 8 команд каждая команда играет 7 игр, 8*7=56, в этом числе каждая игра посчитана дважды, значит, всего в группе сыграно 28 игр. Рассуждая аналогично, в группе из 9 команд будет сыграно 9*8/2=36 игр. Тогда в групповом этапе сыграно 28+28+36=92 игры. По условию в финале играют 6 команд, которые сыграют 6*5/2=15 игр. Итого имеем 92+15=107 игр.

Задача 9. (14 баллов) Егор нарисовал выпуклый многоугольник и провёл все его диагонали. Их оказалось 119. Сколько углов у этого многоугольника?

Ответ: 17.

Решение: Из каждой вершины n-угольника можно провести n-3 диагонали, потому что количество оставшихся вершин n-1, а отрезки к соседним вершинам - стороны многоугольника. Тогда n*(n-3) - количество всех отрезков, проведённых из каждой вершины. В этом количестве одна диагональ учитывается дважды (как проведённая из каждого из её концов), тогда реальное количество диагоналей - $\frac{n*(n-3)}{2} = 119$. Отсюда $n * (n-3) = 238,\ n^2 - 3 * n - 238 = 0$. Решая квадратное уравнение, получаем $n = \frac{3 \pm \sqrt{9+952}}{2} = \frac{3 \pm 31}{2}$. У этого уравнения только одно положительное решение - 17, что и является ответом.

Задача 10. (17 баллов) Про натуральное число x известно, что оно оканчивается на 3 и имеет ровно 16 различных делителей (включая 1 и само число). Сколько различных делителей имеет число 100·x?

Ответ: 144.

Решение: У числа 100 всего 9 делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Поскольку число x оканчивается на 3, то оно не делится ни на 2, ни на 5, то есть у чисел x и 100 нет общих делителей. Тогда чтобы найти число делителей 100*x нам нужно перемножить число делителей каждого из этих чисел, получим 16*9=144.